**Министарство просвете, науке и технолошког развоја**
**ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ**

**Окружно такмичење из математике**
**ученика основних школа**
**25.03.2018.**

**VII разред**

**1**. Нека је $H$ ортоцентар и $O$ центар описане кружнице оштроуглог троугла $ABC$. Нека је тачка $M$ други пресек праве одређене тачкама $A$ и $O$ са описаном кружницом. Докажи да троуглови $BCM$ и $BCH$ имају једнаке површине.

**2**. Да ли је број $\sqrt{3-2\sqrt{2}}+\sqrt{5-2\sqrt{6}}+\sqrt{7-2\sqrt{12}}$ рационалан?

**3**. а) Колико делилаца у скупу природних бројева има број $2^3 \cdot 4^5 \cdot 6^7$?
б) Колико међу тим делиоцима има оних који су куб неког природног броја?

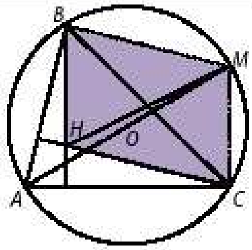
**4**. Дат је конвексан четвороугао са нормалним дијагоналама. Да ли обавезно постоји конвексан четвороугао са бар два права унутрашња угла, чије су странице (у неком поретку) једнаке страницама датог четвороугла?

**5**. Последња цифра броја $n^2 + 2n$ је 4 ($n$ је природан број). Одреди претпоследњу цифру (цифру десетица) тог броја.

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 150 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

**VII РАЗРЕД**

| |
|---|
| **Признавати сваки тачан поступак који се разликује од кључа.** |
| **Бодовање прилагодити конкретном начину решавања.** |

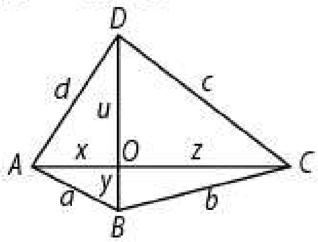



**1**. (**МЛ 51/4**) Како је $BH \perp CA$ (висина троугла) и $MC \perp CA$ ($\measuredangle MCA$ је над пречником), то је $BH \parallel MC$ (слика). Слично је $CH \parallel MB$, па је четвороугао $BMCH$ паралелограм. Одатле следи да су троуглови $BCH$ и $BCM$ подударни (ССС), па имају једнаке површине [**20 бодова**].

**2**. $\sqrt{3-2\sqrt{2}}+\sqrt{5-2\sqrt{6}}+\sqrt{7-2\sqrt{12}}=\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}+\sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}+\sqrt{(2-\sqrt{3})^2}$ [**4 + 4 + 4 бода**] $=\sqrt{2}-1+\sqrt{3}-\sqrt{2}+2-\sqrt{3}=1$ [**8 бодова**]. Дакле, дати број је рационалан.

**3**. а) Како је $2^3 \cdot 4^5 \cdot 6^7 = 2^{20} \cdot 3^7$ [**5 бодова**], то дати број има $21 \cdot 8 = 168$ делилаца [**5 бодова**].
б) Како је $2^{20} \cdot 3^7 = (2^3)^6 \cdot 2^2 \cdot (3^3)^2 \cdot 3$, то дати број има $7 \cdot 3 = 21$ делилац који је куб неког природног броја [**10 бодова**. Ако се задатак решава набрајањем делилаца, за 1–14 набројаних 0 бодова, за 15–20 набројаних 5 бодова, за све набројане 10 бодова].

**4**. Нека је $O$ тачка пресека дијагонала четвороугла $ABCD$ чије су странице $a = AB$, $b = BC$, $c = CD$, $d = DA$. Означимо дужине дужи $AO$, $BO$, $CO$, $DO$ редом са $x$, $y$, $z$, $u$. Тада је $a^2 = x^2 + y^2$, $b^2 = y^2 + z^2$, $c^2 = z^2 + u^2$, $d^2 = u^2 + x^2$. Следи да је $a^2 + c^2 = x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = b^2 + d^2$ [**10 бодова**]. Одавде закључујемо да ће четвороугао са дијагоналом дужине $\sqrt{x^2+y^2+z^2+u^2}$ и страницама дужине a и c са једне стране те дијагонале и страницама b и d са друге стране те дијагонале имати два права угла (у крајевима друге дијагонале) [**10 бодова**].




**5**. *Прво решење*: Из услова задатка следи да је последња цифра броја $n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$ цифра 5. Самим тим и последња цифра броја $n + 1$ је једнака 5 [**10 бодова**], па је $n + 1 = 10k + 5$, за неко $k \in N_0$. Квадрирањем добијамо да је $(n + 1)^2 = (10k + 5)^2 = 100k^2 + 100k + 25$, што значи да је двоцифрени завршетак броја $(n + 1)^2$ једнак 25, а броја $n^2 + 2n$ је 24. Дакле, цифра десетица броја $n^2 + 2n$ је 2 [**10 бодова**].
*Друго решење*. Производ $n(n + 2)$ се завршава цифром 4, што је могуће једино у случају да се $n$ завршава цифром 4 (а $n + 2$ цифром 6) [**10 бодова**]. Дакле, мора бити $n = 10k + 4$, $n + 2 = 10k + 6$, па је $n(n + 2) = (10k + 4)(10k + 6) = 100(k^2 + k) + 24$, па се број $n^2 + 2n$ завршава са 24, тј. цифра десетица му је 2 [**10 бодова**].